SCI110 Outils mathématiques pour l'informatique (3/4)

Théorie des ensembles

IUT1 dept. SRC Grenoble

Jean-François Berdjugin

Jean-François Remm

Définition

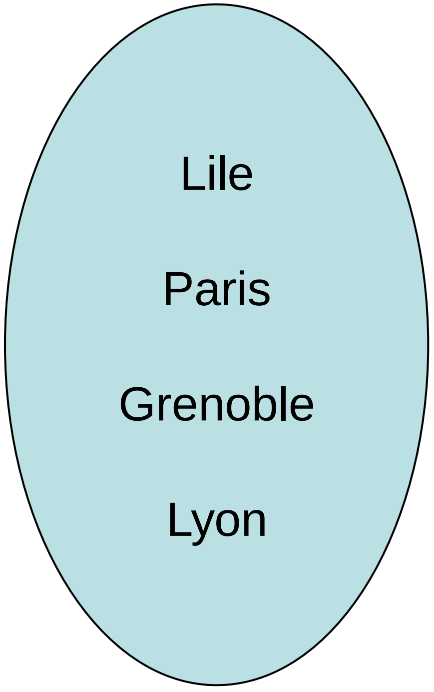
La théorie des ensembles définie la notions d’ensemble.

Plusieurs approches :

- Naïve => paradoxes
- Axiomatique (Zermelo)

Naïve

- L’ensemble peut être vu comme un sac virtuel contenant des **éléments**.
- Villes={Lile, Paris, Grenoble, Lyon}
- On dit que l’élément **appartient** à l’ensemble
  - Lile $\in$ Ville
  - …
  - Lyon $\in$Ville
- On dit que l’élément n’appartient pas.
  - Toulouse $\notin$Ville



Naïve

- Égalité

  $(A=B) \Leftrightarrow [\forall\ x \bullet (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$

- Singleton

  $\{a\}$

  $\forall a \bullet \exists\ S \bullet \forall\ x \bullet (x \in S) \Leftrightarrow (x = a)$

- $\{a,b\}$

  $\forall a \bullet \forall b \bullet \exists\ P \bullet \forall\ x \bullet [(x \in P) \Leftrightarrow (x = a) \vee (x = b)]$

Naïve

- $\{a,a\} = \{a\}$?

- $\{a,b\} = \{c,d\}$

  $\forall a \bullet \forall b \bullet \forall c \bullet \forall d \bullet \{a,b\} = \{c,d\} \Leftrightarrow [(a=c \wedge b=d) \vee (a=d \wedge b=c)]$

- $\{a,b\}=\{b,a\}$?

Naïve

- $\{a,a\} = \{a\}$?

  En utilisant

  $\forall a \bullet \forall b \bullet \exists\ P \bullet \forall\ x \bullet [(x \in P) \Leftrightarrow (x = a) \vee (x = b)]$

- $\{a,b\} = \{c,d\}$

  $\forall a \bullet \forall b \bullet \forall c \bullet \forall d \bullet \{a,b\} = \{c,d\} \Leftrightarrow [(a=c \wedge b=d) \vee (a=d \wedge b=c)]$

- $\{a,b\}=\{b,a\}$?

  En utilisant le lemme précédent

Naïve

- Définition en extension

  $\{1,2,3,4,5\}$

- Définition en compréhension

  $\{x \in N \mid 0 < x < 6\}$

  $\{x : N \mid 0 < x < 6\}$

  $\{x : N \mid 1 < x < 7 \bullet x-1\}$

Naïve

- Ensemble vide $\emptyset = \{\}$

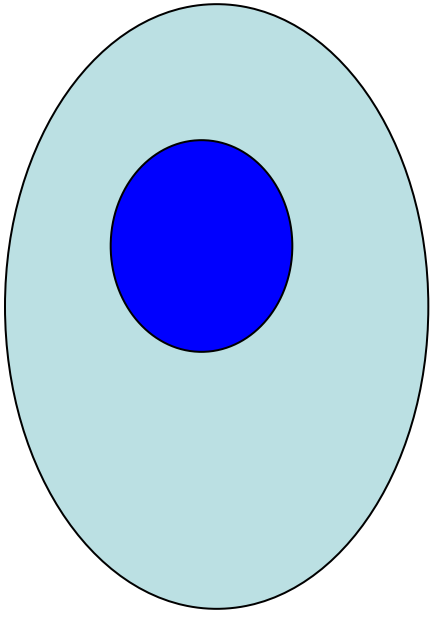
  $\exists\ E \bullet \forall\ x \bullet x \notin E$

- Ensemble universel
  => Problème

- Inclusion $A \subseteq B$

  $\forall\ x \bullet (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$

  $\{\ x \in A \mid P(x)\ \} \subseteq A$



Naïve

- $\forall A \bullet \varnothing \subseteq A$?

- $\forall A \bullet A \subseteq A$?

Naïve

- $\forall A \bullet \varnothing \subseteq A$?

Par l'absurde on suppose que {} n'est pas un sous-ensemble de A donc {} contient un élément qui n'est pas élément de A or {} est vide.

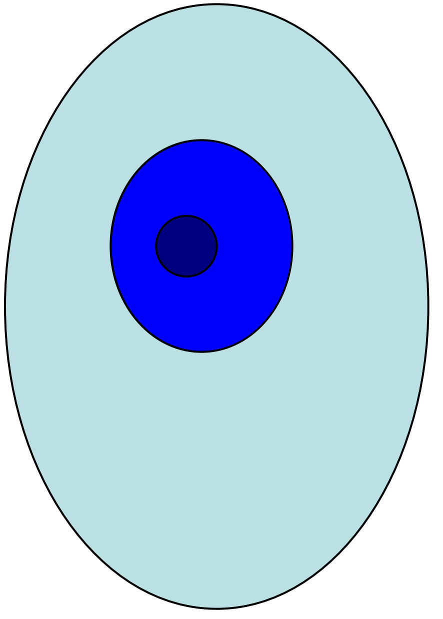
- $\forall A \bullet A \subseteq A$?

Définition de l'inclusion

Naïve

- $\forall\ A \bullet \forall\ B \bullet (A=B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

- $\forall\ A \bullet \forall\ B \bullet \forall\ C \bullet (A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$



Naïve

- Ensemble des parties $\wp$ E

$\forall$ E • $\exists$ P • $\forall$x • x $\in$ P$\Leftrightarrow$ x $\subseteq$ E

$\wp$ {1,2} = {{},{1},{2},{1,2}}

Naïve

Opération

- Union $S = A \cup B$
  - $\forall A \bullet \forall B \bullet \exists S\ (x \in S) \Leftrightarrow (x \in A \lor x \in B)$
- Intersection $S = A \cap B$
  - $\forall A \bullet \forall B \bullet \exists U\ (x \in U) \Leftrightarrow (x \in A \land x \in B)$
- Différence $S = A / B$
  - $\forall A \bullet \forall B \bullet \exists U\ (x \in U) \Leftrightarrow (x \in A \land x \notin B)$

Paradoxe

Le mathématicien Bertrand Russell proposa en 1901 de considérer l'ensemble des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes.

Soit M cet ensemble. Formellement, A est un élément de M ssi A n'est pas un élément de lui-même.

Faisons l'hypothèse que M se contient lui-même, autrement dit que M est un élément de M. Cela est contradictoire avec la définition de M. On en déduit que M ne se contient pas lui-même. Mais dans ce cas, M est un ensemble qui n'est pas élément de lui-même et devrait à ce titre faire partie de M. Ainsi naît le paradoxe.

Paradoxe

$M = \{A \mid A \notin A\}$

Soit $M \in M$

par définition $M \Rightarrow M \notin M$

Soit $M \notin M$

par définition $M \Rightarrow M \in M$

Contraction => paradoxe

Paradoxe

Quelques années plus tard, en 1919, Russell publiera une version populaire de son antinomie, connue sous le nom de paradoxe du barbier : définissons le barbier du village comme le villageois qui rase les gens qui ne se rasent pas eux-mêmes. Qui rase le barbier? S'il se rase lui-même, c'est donc le barbier qui le rase, mais par définition, le barbier ne rase que les villageois qui ne se rasent pas eux-mêmes! Impossible donc... C'est donc un autre villageois qui rase le barbier. Mais, toujours par définition du barbier, c'est lui qui doit le raser! Contradiction!

Théorie axiomatique

axiome d'extensionnalite:

- Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments.

- (ext) : $\forall$ S • $\forall$ T • ($\forall$ x • (x $\in$ S $\Leftrightarrow$ x $\in$ T) $\Rightarrow$ S = T)

Théorie axiomatique

Axiome de la paire :

- Étant donnes deux ensembles S et T, il existe un ensemble dont les éléments sont exactement S et T et noté {S, T}.

- (paire) : $\forall$ A $\bullet$ $\forall$ S $\bullet$ $\forall$ T $\bullet$ (A $\in$ {S, T} $\Leftrightarrow$ A = S $\vee$ A = T)

Théorie axiomatique

axiome de la réunion :

- Étant donne un ensemble S, il existe un ensemble dont les éléments sont les éléments des éléments de S donc qui est la réunion des ensembles qui appartiennent à S.
- (réunion) : $\forall$ a • $\forall$ S • (a $\in \cup_{x \in S} x \Leftrightarrow \exists$ T • (t $\in$ S $\wedge$ a $\in$ T))

Théorie axiomatique

axiome des parties :

- Étant donne un ensemble S, il existe un ensemble note $\wp$(S) dont les éléments sont les sous ensembles de S.
- (parties) : $\forall$ a $\forall$ S(a $\in$ $\wp$(S) $\Leftrightarrow$ $\forall$ x (x $\in$ a $\Rightarrow$ x $\in$ S))

Théorie axiomatique

schéma d'axiomes de compréhension :

- Il s'agit d'une infinité d'axiomes. Pour toute formule F, et tout ensemble S, il existe un ensemble dont les éléments sont les éléments de S qui vérifient F.

- (comp) : $\forall a \forall S (a \in \{x \mid x \in S \wedge F(x)\} \Leftrightarrow a \in S \wedge F(a))$

Théorie axiomatique

(vide) : $\exists$ a($\forall$ x(x $\notin$ a))

(infini) : $\exists$ x($\emptyset \in$ x $\wedge$ $\forall$ y (y $\in$ x $\Rightarrow$ y $\cup$ {y} $\in$ x))

Théorie axiomatique

Inclusion

$A \subseteq B = A \in \wp(B)$

Union

$A \cup B = \bigcup_{x \in \{A,B\}} x$

Intersection

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Différence

$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Théorie axiomatique

Dans la pratique :

N'appartient pas $a \notin B \Leftrightarrow \neg(a \in B)$

Inclusion $A \subseteq B = A \in \wp(B)$

Union $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Intersection $A \cap B =\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Différence $A / B =\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Théorie axiomatique

Couple :

Un couple (a; b) est une paire ordonnée, c'est a dire un ensemble dont le premier élément est a et le second b. On peut exprimer cette propriété par :

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Théorie axiomatique

On peut ensuite définir le produit cartésien de deux ensembles A et B comme l'ensemble des couples dont le premier élément est dans A et le second dans B:

$A \times B = \{(x, y) \mid (x, y) \in \wp(\wp(A \cup B)) \wedge x \in A \wedge y \in B\}$

a={1,2} b={x}

$a \cup b = \{1,2,x\}$

$\wp(a \cup b) = \{\{\},\{1\},\{2\},\{x\},\{1,2\},\{1,x\},\{2,x\},\{1,2,x\}\}$

$\wp\ \wp(a \cup b) = \{\{\},$

{{}}, {{1}}, {{2}}, {{x}}, {{1,2}}, {{1,x}},{{2,x}}, {{1,2,x}},

{{},{1}}, {{},{2}}, {{},{x}}, {{},{1,2}}, {{},{1,x}} ,{{},{2,x}}, {{}, {1,2,x}},

{{1},{1}}, {{1},{2}}, {{1},{x}}, {{1},{1,2}}, {{1},{1,x}} ,{{1},{2,x}}, {{1}, {1,2,x}},

…

}

Théorie axiomatique

Montrer $\forall$ a $\forall$ b (a,b) = {{a},{a,b}}

Simplement : A ={a}, B={b}

A $\cup$ B = {a,b}

$\wp$(a $\cup$ b) = {{}, {a}, {b},{a,b}}

$\wp$ $\wp$(a $\cup$ b) ={{},

{{},{a}}, {{},{b}}, {{},{a,b}}

{{a},{b}}, {{a},{a,b}}, {{b}, {a,b}}, {{a,b}}

(x, y) $\in$ $\wp$($\wp$(A $\cup$ B)) $\wedge$ x $\in$ A $\wedge$ y $\in$ B

(a,b) = {{a},{a,b}}

Exercice

Démontrer que :

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Sachant que :

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\wp(A \cap B) = (\wp A) \cap (\wp B)$

Exercice

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$\Leftrightarrow$

$(x,y) \in A \times (B \cap C)$

$\Leftrightarrow$

$x \in A \wedge y \in B \cap C \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup (B \cap C))$

$\Leftrightarrow$

$x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup (B \cap C))$

$\Leftrightarrow$

$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup (B \cap C))$

$\Leftrightarrow$

$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x,y) \in \wp(\wp((A \cup B) \cap (A \cup C)))$

$\Leftrightarrow$

$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup B) \cap \wp(A \cup C))$

$\Leftrightarrow$

$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup B)) \cap \wp(\wp(A \cup C))$

$\Leftrightarrow$

$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup B)) \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup C))$

$\Leftrightarrow$

$(x,y) \in (A \times B) \wedge (x,y) \in (A \times C)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$