SCI110 Outils mathématiques pour l’informatique (1/4)

Logique des propositions

IUT1 dept. SRC Grenoble

Jean-François Berdjugin

Jean-François Remm

M1.22.2 Outils mathématiques pour l’informatique

Ouvrages utilisés :

- Mathématique discrètes appliquées à l’informatique, Rod Haggarty ISBN 2-7440-7100-5
- Using Z Specification, Refinement, and Proof, Jim Woodcock and Jim Davis ISBN 0-13-948472-8

UE2 : Culture scientifique et traitement de l’information

Module : **C**ulture **S**cientifique et **T**raitement de **l**'Information

1er Semestre

Cours (3*1,5) et TD (9*1,5) :

- Logique et calcul des propositions
- Logique des prédicats du premier ordre
- Théorie des ensembles
- Relations et fonctions

Logique

La logique est l’étude de la nature des concepts, de la vérité des jugements et, de la validité des raisonnements.

Nous allons présenter de façon non formelle quelles que unes de ses théories

Logique

1. Si Loïc a des bonnes notes c’est qu’il est astucieux
2. Si Loïc a des bonnes notes c’est qu’il est astucieux or Loïc a de bonnes notes donc il est astucieux

(« Le lapin est blanc / Loïc a de bonnes notes »)

1. Si le lapin est blanc c’est qu’il est astucieux
2. Si le lapin est blanc c’est qu’il est astucieux or le lapin est blanc donc il est astucieux

Quel est la valeur de ces jugements, dans un cas particulier, tout le temps ?

Logique des propositions

La logique des proposition traite des propositions, des déclarations qui peuvent être vraie ou fausse.

Vincent a les yeux verts

Isabelle a les yeux bleus

Les oranges sont des fruits

La logique c'est rigollot

Le lapin tient une carotte

Pour pouvoir raisonner, avoir un calcul des propositions, il faut avant tout définir une syntaxe et une sémantique.

Langage

- Alphabet :
  - des variables de proposition (ou atomes) : p,q,r, …
  - des connecteurs : $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg\}$
    - Ou, disjonction, $\vee$
    - Et, conjonction, $\wedge$
    - Implication, $\Rightarrow$
    - Négation, $\neg$
  - des symboles de ponctuation : {(,)}
- Grammaire
  - Les variables de proposition sont des formules
  - Si A et B sont des formules alors (A), $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $\neg A$, $(A \Rightarrow B)$ sont des formules

Exemple de formule

Soit p la proposition : Vincent a les yeux verts

Soit q la proposition : Isabelle a les yeux bleus

Alors les expressions suivantes sont des formules :

- $(\neg p \wedge q)$ (non p et q) correspond à Vincent n’a pas les yeux verts et isabelle a les yeux bleus
- $(\neg p \wedge \neg q)$ (non p et non q) correspond à Vincent n’a pas les yeux vert et Isabelle n’a pas les yeux bleus
- $(p \vee q)$ (p ou q), soit Vincent a les yeux verts soit Isabelle a les yeux bleu

Exemple de formule

Soit p la proposition : Loïc a des bonnes notes
Soit q la proposition : Loïc est astucieux

Si un Loïc a des bonnes notes c'est qu'il est astucieux or Loïc a de bonnes notes donc il est astucieux

$(((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q)$

Mais quel est le sens de ces formules, c'est le rôle de la sémantique.

Sémantique

En logique propositionnelle, une formule est soit vraie soit fausse.

La signification d’une formule dépend de la valeur de vérité de ses variables de propositions (vraie ou fausse, 1 ou 0, …).

On parle alors d’interprétation ou d’affectation qui peuvent être représentée sous forme de table de vérité.

Nombre d’interprétation

Si une formule contient n variable alors il existe 2^n interprétations de F

Pour 3 variable, j’ai donc 8 interprétations possibles

p	q	r

Nombre d'interprétation

Si une formule contient n variable alors il existe 2^n interprétations de F

Pour 3 variable, j'ai donc 8 interprétations possibles

p	q	r
F	F	F
F	F	V
F	V	F
F	V	V
V	F	F
V	F	V
V	V	F
V	V	V

Table de vérité de la disjonction

	p	q	$(p \vee q)$
i_1	F	F	F
i_2	F	V	V
i_3	V	F	V
i_4	V	V	V

Interprétations

Mondes possibles
$2^{\text{nb variables}} = 2^2 = 4$

Valeur de la formule

Table de vérité de la disjonction

p	q	$(p \vee q)$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Toujours évaluée à vraie sauf pour le cas (le monde, l'interprétation) : (F,F).

Table de vérité de la conjonction

p	q	$(p \wedge q)$
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

Toujours évaluée a faux sauf pour le cas (le monde, l'interprétation) : (V,V).

Table de vérité de la conjonction

p	q	$(p \wedge q)$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Toujours évaluée a faux sauf pour le cas (le monde, l'interprétation) : (V,V).

Table de vérité de la négation

p	¬ p
F	
V	

Table de vérité de la négation

p	$\neg$ p
F	V
V	F

Implication

p	q	$(p \Rightarrow q)$
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Faux implique Vrai

Cas problème : Vrai implique Faux

« p implique q » est différent de « p on déduit q » mais suffisant pour raisonner

Implication

p	q	$(p \Rightarrow q)$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Faux implique Vrai

Cas problème : Vrai implique Faux

« p implique q » est différent de « p on déduit q » mais suffisant pour raisonner

Sémantique, satisfaisabilité, validité

Une interprétation d'une formule F est une fonction de l'ensemble des variables de proposition vers celui des booléen {vrai,faux}.

La valeur de vérité d'une formule (F) pour une interprétation donnée (I) est une fonction des formules vers les booléens notée $V_I(F)$. La valeur booléenne que prend cette formule pour une interprétation est obtenue en utilisant les tables de vérité des connecteurs vues précédemment.

Sémantique, satisfaisabilité, validité

$p \vee q$

I1 : {(p,vrai),(q,vrai)}

I1 est une interprétation qui à p associe vrai et à q associe vrai dans cette interprétation $p \vee q$ est vraie : $V_{I_1}(p \vee q)$= vrai

I2 : {(p,faux),(q,faux)}

I1 est une interprétation qui à p associe faux et à q associe faux dans cette interprétation $p \vee q$ est fausse : $V_{I_2}(p \vee q)$= faux

Sémantique, satisfaisabilité, validité

Une interprétation I satisfait une formule F ssi la valeur de vérité de F pour cette interprétation est vraie : $V_I(F) = \text{vrai}$

Une formule F est satisfaisable ssi il existe une interprétation I telle que $V_I(F) = \text{vrai}$, on note :

$$I \models F$$

Une formule F est une tautologie ou est valide ssi elle est valide dans toute interprétation, on note :

$$\models F$$

Déduction

Comment prouver qu'une formule est une tautologie (une formule valide) : Si un Loïc a des bonnes notes c'est qu'il est astucieux or Loïc a de bonnes notes donc il est astucieux

1. Utilisation de la valeur de vérité de la formule
2. Utilisation d'un système formel :
   - Déduction Naturelle
   - Calcul des séquents

Déduction Valeur de vérité

Si Loïc a des bonnes notes c'est qu'il est astucieux or Loïc a de bonnes notes donc il est astucieux (p: Loic a de bonnes notes, q: Loic est astucieux)

$\models (((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q)$? Valide

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \wedge p)$	$(((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q)$
F	F			
F	V			
V	F			
V	V			

Déduction Valeur de vérité

Si Loïc a des bonnes notes c'est qu'il est astucieux or Loïc a de bonnes notes donc il est astucieux (p: Loic a de bonnes notes, q: Loic est astucieux)

$$\models (((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q)$$? Valide

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \wedge p)$	$(((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q)$
F	F	V	F	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

Déduction valeur de vérité

Si Loïc a des bonnes notes c'est qu'il est astucieux p: Loic a de bonnes notes, q: Loic est astucieux)

$\models (p \Rightarrow q)$?

Non Valide

p	q	$(p \Rightarrow q)$
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

Déduction valeur de vérité

Si Loïc a des bonnes notes c’est qu’il est astucieux p: Loic a de bonnes notes, q: Loic est astucieux)

$\models (p \Rightarrow q)$?

Non Valide

p	q	$(p \Rightarrow q)$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Déduction calcul des séquents (notation)

Un séquent est constitué d'un ensemble d'hypothèses (H_i) et d'un ensemble de buts (B_i)

$$H_1, \ldots, H_n \vdash B_1, \ldots, B_m$$

Sous les hypothèses $H_1, \ldots, H_n$ au moins un des B_i doit est vrai

$$H_1, \ldots, H_n \vdash B_1, \ldots, B_m$$

ssi (Si et seulement si)

$$\vdash (H_1 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$$

Déduction calcul des séquents (règles)

Structure

$$\frac{P_1 \ldots P_n}{C_m} R$$

Exemples

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta} \text{ axiome}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge_d$$

Une règle d’inférence R est constituée de prémisses P_i et d’une conclusion C_m. A partir des prémisses en appliquant la règle, on déduit la conclusion.

Une preuve est un arbre constitué d’application de règles d’inférences

Déduction calcul des séquents (règles)

$$\frac{}{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{A}, \Delta}\ \text{axiome}$$

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \vdash \Delta}\ \wedge_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, \Delta}\ \wedge_d$$

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \Delta}\ \vee_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \Delta}\ \vee_d$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \Delta}\ \neg_g \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{A}, \Delta}\ \neg_d$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \vdash \Delta}\ \Rightarrow_g \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}, \Delta}\ \Rightarrow_d$$

Déduction calcul des séquents (règles)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}\ \text{aff}_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}\ \text{aff}_d$$

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{A} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}\ \text{contraction}_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}\ \text{contraction}_d$$

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{cut}$$

Déduction calcul des séquents (exemple)

Si Loïc a des bonnes notes c’est qu’il est astucieux or Loïc a de bonnes notes donc il est astucieux (p: Loic a de bonnes notes, q: Loic est astucieux)

$$\vdash (((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q) \ ?$$

Déduction calcul des séquents (exemple)

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}, \Delta} \Rightarrow_d$$

$\vdash (((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q)$?

Utilisation de la règle $\Rightarrow_d$ avec $((p \Rightarrow q) \wedge p)/A$ et q/B

$$\frac{\mathbf{(p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q}}{\mathbf{\vdash ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q}} \Rightarrow_d$$

Déduction calcul des séquents (exemple)

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \vdash \Delta} \wedge_g$$

Utilisation de la règle $\wedge_g$ avec $(p \Rightarrow q)/A$, p/B et q/Δ

$$\cfrac{\cfrac{\mathbf{p \Rightarrow q, p} \vdash q}{\mathbf{(p \Rightarrow q) \wedge p} \vdash q} \wedge_g}{\vdash ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q} \Rightarrow_d$$

Déduction calcul des séquents (exemple)

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \qquad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \vdash \Delta} \Rightarrow_g$$

Utilisation de la règle $\Rightarrow_g$ avec p/A , q/B, q/Δ et p/ Γ

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \vdash p, q \qquad p, q \vdash q}{p \Rightarrow q, p \vdash q} \Rightarrow_g}{(p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q} \wedge_g}{\vdash ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q} \Rightarrow_d$$

Déduction calcul des séquents (exemple)

$$\frac{}{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{A}, \Delta}\ \text{axiome}$$

Utilisation de la règle axiome avec p/A , q/Δ

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p, q}\ \text{axiome} \qquad p, q \vdash q}{p \Rightarrow q, p \vdash q}\ \Rightarrow_g}{(p \Rightarrow q) \wedge p \ \vdash q}\ \wedge_g}{\vdash ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q}\ \Rightarrow_d$$

Déduction calcul des séquents (exemple)

$$\dfrac{}{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{A}, \Delta}\ \text{axiome}$$

Utilisation de la règle axiome avec q/A , p/Γ

Une preuve formelle complète

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p, q}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{}{p, q \vdash q}\ \text{axiome}}{p \Rightarrow q, p \vdash q}\ \Rightarrow_g}{(p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q}\ \wedge_g}{\vdash ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q}\ \Rightarrow_d$$

Propriété

La logique des propositions et la calcul des séquents sont :

décidable, c’est à dire que l’on peut toujours montrer en un nombre fini d’opérations si une formule est vraie ou fausse.

Méthode : table de vérité ou déductions logiques

Problème : le pouvoir d’expression, « Tout élèves possède des notes et il existe des élèves qui n’ont pas la moyenne » => La logique des prédicat du premier ordre.

Propriété

Le calcul des propositions est correct : tout ce qui est prouvable ($\vdash$) est vrai ($\models$)

Le calcul des propositions est complet : tout ce qui est vrai ($\models$) est prouvable ($\vdash$)

Dans la pratique
Équivalence de formules

≡ signifie a même valeur dans tous les mondes possibles.

Exemples :

- $\neg \neg p \equiv p$
  p : il fait beau
  $\neg p$: il ne fait pas beau
  $\neg \neg p$: il fait beau

p	¬ p	¬ ¬ p
F		
V		

- $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
  p : il fait beau
  q : je fais du vélo
  $\neg p \wedge \neg q$: il ne fait pas beau et je ne fais pas de vélo
  $p \vee q$: il fait beau ou je fais du vélo

p	q	¬ p	¬ q	¬ p ∧ ¬ q	p ∨ q	¬ (p ∨ q)
F	F					
F	V					
V	F					
V	V					

Dans la pratique
Équivalence de formules

≡ signifie a même valeur dans tous les mondes possibles.

Exemples :

- $\neg \neg p \equiv p$
  p : il fait beau
  $\neg p$: il ne fait pas beau
  $\neg \neg p$: il fait beau

p	¬ p	¬ ¬ p
F	V	F
V	F	V

- $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
  p : il fait beau
  q : je fais du vélo
  $\neg\ p \wedge \neg q$: il ne fait pas beau et je ne fais pas de vélo
  $p \vee q$: il fait beau ou je fais du vélo

p	q	¬ p	¬ q	¬ p ∧ ¬ q	p ∨ q	¬ (p ∨ q)
F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	V	F
V	V	F	F	F	V	F

Implication

$p \Rightarrow q \equiv \neg\, q \Rightarrow \neg p$

La proposition $\neg\, q \Rightarrow \neg p$ est la contraposée de la proposition $p \Rightarrow q$

p	q	$\neg\, p$	$\neg\, q$	$p \Rightarrow q$ $\equiv$ $\neg p \vee q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$ $\equiv \neg\, \neg q \vee \neg p$ $\equiv \neg p \vee q$
F	F				
F	V				
V	F				
V	V				

Implication

$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

La proposition $\neg q \Rightarrow \neg p$ est la contraposée de la proposition $p \Rightarrow q$

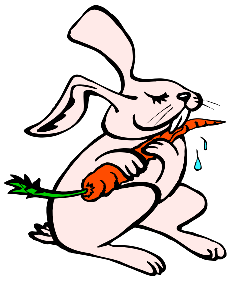
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$ $\equiv$ $\neg p \vee q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$ $\equiv \neg \neg q \vee \neg p$ $\equiv \neg p \vee q$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F
V	V	F	F	V	V

Implication et méthode de preuve

- Preuve directe
- Preuve par contraposée
- Preuve par contradiction

D’autre méthodes existent comme la preuve par induction (récurrence);

Preuve directe



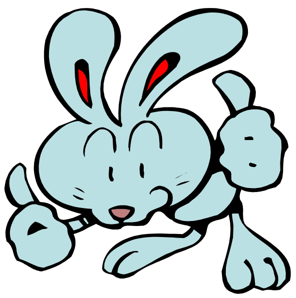
Les lapins blancs ont une carotte

p : le lapin est blanc

q : le lapin a une carotte

$p \Rightarrow q$

On suppose que p est vrai (le lapin est blanc) et on montre que q est vrai (le lapin a une carotte). On évite ainsi le cas qui pose problème : p est vraie et q est fausse, le seul cas ou $p \Rightarrow q$ est fausse.



Preuve par contraposé

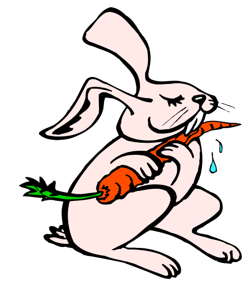
Les lapins blancs ont une carotte

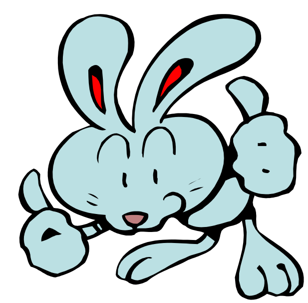
p : le lapin est blanc

q : le lapin a une carotte

$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

On suppose que q (le lapin a une carotte) est fausse et on montre que p (le lapin est blanc) est fausse, ce qui revient a démontrer que p $\Rightarrow$ q est vraie.





Preuve par contradiction

Les lapins blancs ont une carotte

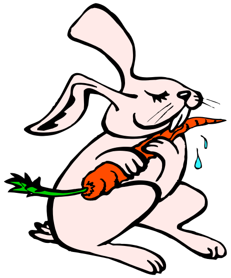
p : le lapin est blanc
q : le lapin a une carotte

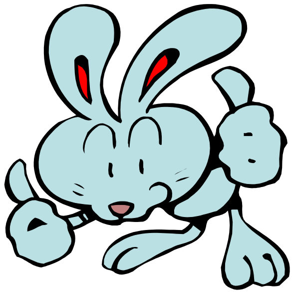
$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

On suppose que p (le lapin est blanc) est vraie et q (le lapin a une carotte) est fausse, et on en déduit une contradiction.

On évite ainsi le cas qui pose problème : p est vraie et q est fausse, le seul cas ou $p \Rightarrow q$ est fausse

Ici, je ne peux trouver de lapin avec blanc sans carotte





Équivalence

$p \Leftrightarrow q \;\equiv\; p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$

$p \Rightarrow q$

p est une condition suffisante pour q et q est une condition nécessaire.

ABCD est un carré (p) est une condition suffisante pour que ABCD soit un parallélogramme (q)

ABCD est un parallélogramme (q) est une condition nécessaire pour que ABCD soit un carré (p)

On écrira $p \Rightarrow q$

$p \Leftrightarrow q$: condition nécessaire et suffisante

p	q	$p \Leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Tautologies

$p \Rightarrow p$ $p \Leftrightarrow p$	Identité
$\neg(p \lor q) \Leftrightarrow (\neg p \land \neg q)$ $\neg(p \land q) \Leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$	Morgan
$p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$ $p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)$	Distributivité
$p \lor \neg p$	Tiers exclu
$((p \Rightarrow q) \land p) \Rightarrow q$	Modus-ponens

…

Exemple de démonstration

$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$?

$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \equiv \neg\, ((p \Rightarrow q) \wedge p) \;\; \vee q$

$\equiv \neg((\neg\, p \vee q) \wedge p) \;\; \vee q$

$\equiv \neg((\neg\, p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \vee q$

$\equiv \neg(q \wedge p) \vee q$

$\equiv (\neg q \vee \neg p) \vee q$

$\equiv (\neg q \vee q) \vee p$ Tautologie

Exemple de démonstration

$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$?

Table de vérité :

p	q	$p \Rightarrow q$	$((p \Rightarrow q) \wedge p)$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
F	F	V	F	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

Exercice

Si il pleut, je reste chez moi

Je suis chez moi

Donc il ne pleut pas

Exercice

Si il pleut, je reste chez moi

Je suis chez moi

Donc il ne pleut pas

p : il pleut

q : je suis chez moi

$(p \Rightarrow q \wedge q) \Rightarrow \neg p$?

$(p \Rightarrow q \wedge q) \Rightarrow \neg p \equiv ((\neg p \vee q)\ ((\neg p \vee q)\ q\ ) \Rightarrow \neg p$

$\equiv (\neg p \wedge q) \Rightarrow \neg p \equiv p \vee q \vee \neg p \equiv \boldsymbol{(p \vee \neg p)} \vee q$ Tautologie

Exercice

Si il pleut, je reste chez moi

Il ne pleut pas

Donc je ne reste pas chez moi

Conclusion

- Une proposition est une expression qui prend une valeur de véracité

- Un ensemble de règles permettent d’exprimer un problème et de raisonner

- Un outil : la table de vérité