SCI110 Outils mathématiques pour l'informatique (2/4)

Logique des prédicats du premier ordre

IUT1 dept. SRC Grenoble

Jean-François Berdjugin

Jean-François Remm

Pourquoi ?

La logique des propositions s’applique à des expressions qui soit vraies soit fausses.

Comment exprimer le fait qu’une expression peut être soit vraie soit fausse en fonctions des valeurs assignées aux variables.

$x=x^2$ est vraie seulement pour $x = 0$, $x =1$

La logique des prédicats permet de formuler et de raisonner sur de telles expressions

Langage

- Lise est petite

  Lise : constante
  Est petite : prédicat

- Tous les étudiants sont petits
  Tous : quantificateur
  Étudiant : une variable

- Il existe des étudiants qui sont grands
  Il existe : quantificateur

- Tous les étudiants font moins de 1m80
  Taille de l’étudiant : fonction
  Taille de l’étudiant est inférieure à 1m80 : un prédicat

langage

∀ q uantificateur universel, quelque soit

□∃ quantificateur existentiel, il existe

∃! ou □$\exists_1$ il existe un et un seul

Si x représente un étudiant et P(x) le prédicat selon lequel x a les yeux bleus alors :

∀ x • P(x) signifie tous les étudiants ont les yeux bleus

∃x • P(x) signifie il existe un étudiant qui a les yeux bleus

Le langage

Alphabet :

- Un ensemble de constantes : a, b, c, …
- Un ensemble de prédicats d'arité fixée : A, B, ….
- Un ensemble de variables d'individus : x, y,…
- Un ensemble de symbole de fonctions d'arité fixée

Termes :

- Les constantes et les variables sont des termes.
- Les fonctions de terme sont des termes.

Formules atomique :

- Avec P un symbole de predicat et t1 : : : tn des termes, alors P(t1; : : : ; tn) est une formule atomique.

Formules :

- Les formules atomiques sont des formules
- Si A et B sont des formules alors $(A \wedge B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B)$, (A) et $\neg$ A sont des formules
- Si A est une formule et x une variable alors $\forall x \bullet A$ et $\exists x \bullet A$ sont des formules.

Sémantique

Plus compliquée que pour les propositions

Une interprétation I = { *D*, *Iv, If*, *Ip* }

Domaine d'interprétation

D = {valeurs que peuvent prendre les termes}

Interprétation des variables *Iv*

application qui assure une valeur à toute variable

Interprétation des fonctions *If*

application qui associe à toute fonction d'arité n et à tout nuplet de termes une valeur dans le domaine d'interprétation

Interprétation des prédicats *Ip*

application qui associe à tout prédicat d'arité n et à tout n-uplet de termes une valeur de vérité

Algorithme de normalisation

- réduction de la portée des négations

  $\neg\forall x \bullet A \equiv \exists x \bullet \neg A$

  $\neg \exists x \bullet A \equiv \forall x \bullet \neg A$
- Mise sous forme prenexe (déplacement des quantificateurs en tête)

  $\forall x \bullet \forall y \bullet A \equiv \forall y \bullet \forall x \bullet A$

  $\exists x \bullet \exists y \bullet A \equiv \exists y \bullet \exists x \bullet A$

  $\forall x \bullet (A \wedge B) \equiv (\forall x \bullet A) \wedge (\forall x \bullet B)$

  $\exists x \bullet (A \vee B) \equiv (\exists x \bullet A) \vee (\exists x \bullet B)$

  Si C ne contient aucune occurrence de x

  $(\forall x \bullet A) \vee C \equiv \forall x \bullet (A \vee C)$

  $(\exists x \bullet A) \wedge C \equiv \exists x \bullet (A \wedge C)$

  $(\forall x \bullet C) \equiv C$

  $(\exists x \bullet A) \equiv C$

Mise en forme prenexe

$\forall x \bullet \forall y \bullet (\text{enseigne}(x, y) \Rightarrow \exists z \bullet \text{diplomé}(x, z))$

$=$

$\forall x \bullet \forall y \bullet (\neg \text{enseigne}(x, y) \vee \exists z \bullet \text{diplomé}(x, z))$

$=$

$\forall x \bullet \forall y \bullet \exists z \bullet (\neg \text{enseigne}(x, y) \vee \text{diplomé}(x, z))$

$=$

$\forall x \bullet \forall y \bullet \exists z \bullet (\text{enseigne}(x, y) \Rightarrow \text{diplomé}(x, z))$

Attention

$\exists x . \forall y$ n’est pas le même que $\forall y . \exists x$

$\exists x . \forall y . Loves(x, y)$: “Il y a quelqu’un qui aime tout le monde”

$\forall y . \exists x . Loves(x, y)$: “Chacun est aimé au moins par une personne”

Pouvoir d'expression

Logique plus expressive que celle des propositions => plus de possibilité pour formaliser

Tous les étudiants passent des examens"

1. $\forall x\ .\ \mathit{Etudiant}(x) \Rightarrow \mathit{Passe\_examen}(x)$
2. $\forall x\ .\ (\mathit{Etudiant}(x) \Rightarrow \exists y\ .\ \mathit{Examen}(y) \wedge \mathit{Passe}(x, y))$

Pouvoir d’expression

- Quelqu’un arrive
- Personne n’est venu
- Quelques champignons sont comestibles
- Tous les petits oiseaux volent
- Tous les enfants aiment les bonbons
- Aucun enfant ne déteste les bonbons

Pouvoir d'expression

- Quelqu'un arrive
  Vocabulaire : A(x) : x arrive
  Traduction : $\exists x . A(x)$

- Personne n'est venu
  Vocabulaire : V(x) : x est venu
  Traduction : $\neg \exists x . V(x)$

- Quelques champignons sont comestibles
  Vocabulaire : C(x) : x est un champignon
  M(x) : x est comestible
  Traduction : $\exists x . (C(x) \wedge M(x))$

- Tous les petits oiseaux volent
  Vocabulaire : O(x) : x est un petit oiseau
  V(x) : x vole
  Traduction : $\forall x. (O(x) \Rightarrow V(x))$

- Tous les enfants aiment les bonbons
  Vocabulaire : E(x) : x est un enfant
  A(x) : x aime les bonbons
  Traduction : $\forall x(Ex \Rightarrow Ax)$

- Aucun enfant ne déteste les bonbons
  Vocabulaire : E(x) : x est un enfant
  D(x) : x déteste les bonbons
  Traduction : $\neg \exists x . (E(x) \wedge D(x))$
  ou : $\forall x. (E(x) \Rightarrow \neg D(x))$

Pouvoir d’expression

1. Tout citoyen décoré est marié ou menteur
2. Aucun célibataire n’est décoré sauf s’il est militaire
3. Tout citoyen marié et décoré et menteur
4. Personne n’est à la fois marié et militaire

Pouvoir d'expression

- Constante ?
- Fonctions ?
- Prédicats :
  - Decore(x) x est decore
  - Marie(x) x est marie
  - Menteur(x) x est menteur
  - Militaire(x) x est militaire

Pouvoir d’expression

Decore(x) x est decore
Marie(x) x est marie
Menteur(x) x est menteur
Militaire(x) x est militaire

1. Tout citoyen décoré est marié ou menteur
   $\forall x . \text{Decore}(x) \Rightarrow (\text{Marie}(x) \vee \text{Menteur}(x))$
2. Aucun célibataire n’est décoré sauf s’il est militaire
   $\forall x. (\neg \text{Marie}(x) \wedge \neg \text{Militaire}(x)) \Rightarrow \neg \text{Decore}(x)$
3. Tout citoyen marié et décoré est menteur
   $\forall x. (\text{Marie}(x) \wedge \text{Decore}(x)) \Rightarrow \text{Menteur}(x)$
4. Personne n’est à la fois marié et militaire
   $\forall x. \text{Marie}(x) \Rightarrow \neg \text{Militaire}(x)$

Pouvoir d'expression

$(\forall x . \text{Decore}(x) \Rightarrow (\text{Marie}(x) \vee \text{Menteur}(x))) \wedge$

$(\forall x. (\neg \text{Marie}(x) \wedge \neg \text{Militaire}(x)) \Rightarrow \neg \text{Decore}(x)) \wedge$

$(\forall x. (\text{Marie}(x) \wedge \text{Decore}(x)) \Rightarrow \text{Menteur}(x)) \wedge$

$(\forall x. \text{Marie}(x) \Rightarrow \neg \text{Militaire}(x))$

$\equiv$

$(\forall x . \neg \text{Decore}(x) \vee \text{Marie}(x) \vee \text{Menteur}(x)) \wedge$

$(\forall x. \text{Marie}(x) \vee \text{Militaire}(x) \vee \text{Decore}(x)) \wedge$

$(\forall x. \neg \text{Marie}(x) \vee \neg \text{Decore}(x) \vee \text{Menteur}(x)) \wedge$

$(\forall x. \neg \text{Marie}(x) \vee \neg \text{Militaire}(x))$

Des occurrences de variables libres/liées

Soit x une variable et F une formule.

- Si F = P(t1, ..., tn) alors toutes les occurrence de x dans F sont libres.

- Si F = A * B (où * est un connecteur binaire), alors les occurrences libres de x dans F sont les occurrences libres de x dans A et les occurrences libres de x dans B.

- Si F = $\neg$ A alors les occurrences libres de x dans F sont les occurrences libres de x dans A.

- Si F = $\forall$ x · P(x, ...) ou F = $\exists$ x · P(x, ...) alors x n'a aucune occurrence libre dans F

- Si F = $\forall$ y · P(x, ...) ou F = $\exists$ y · P(x, ...) avec y $\neq$ x, alors les occurrences libres de x dans F sont les occurrences libres de x dans P

Les occurrences lièes de x sont les occurrences non libres de x dans F

Des occurrences de variables libres/liées

$\forall x \cdot (A(x,y) \Rightarrow ((\forall x \cdot B(x)) \vee (\exists y \cdot C(x,y))))$

La première et la troisième occurrence de x sont liées au premier quantificateur universel, la seconde occurrence de x est liée au deuxième quantificateur universel.

La première occurrence de y est libre, la deuxième liée.

Des occurrences de variables libres/liées

$$\forall x \cdot (A(x,y) \Rightarrow ((\forall x \cdot B(x)) \;\vee (\exists y \cdot C(x,y))))$$

$$\equiv$$

$$\forall x \cdot (A(x,y) \Rightarrow ((\forall z \cdot B(z)) \;\vee (\exists y \cdot C(x,y))))$$

Des occurrences de variables libres/liées

$P(x)$

$\forall x \, . \, P(x)$

$\exists y \, . \, Q(x)$

$\exists \, y \, . \, (Q(y) \wedge P(y))$

$(\forall \, x \, . \, P(x)) \wedge Q(x)$

$\forall \, x \, . \, (P(x) \wedge Q(x))$

$\forall \, x \, . \, P(x) \wedge Q(y)$

$P(x) \Rightarrow \exists \, x \, . \, Q(x)$

$\exists \, x \, . \, (P(x) \Rightarrow Q(x))$

$\forall \, x \, . \, \exists \, y \, . \, (P(x) \wedge Q(y))$

$\forall \, x \, . \, (P(x) \Rightarrow \exists \, y \, . \, (Q(y) \wedge R(x)))$

Occurrence Libre ?

Occurrence Liées ?

Des occurrences de variables libres/liées

$P(\underline{x})$

$\forall x . P(\mathbf{x})$

$\exists y . Q(\underline{x})$

$\exists\, y . (Q(\mathbf{y}) \wedge P(\mathbf{y}))$

$(\forall\, x . P(\mathbf{x})) \wedge Q(\underline{x})$

$\forall\, x . (P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x}))$

$\forall\, x . P(\mathbf{x}) \wedge Q(\underline{y})$

$P(\underline{x}) \Rightarrow \exists\, x . Q(\mathbf{x})$

$\exists\, x . (P(\mathbf{x}) \Rightarrow Q(\mathbf{x}))$

$\forall\, x . \exists\, y . (P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{y}))$

$\forall\, x . (P(\mathbf{x}) \Rightarrow \exists\, y . (Q(\mathbf{y}) \wedge R(\mathbf{x})))$

Occurrence <u>Libre</u>

Occurrence **Liées**

Des variables liées, libres, des formules clauses

soit x une variable et F une formule :

- Les occurrences lièes de x sont les occurrences non libres de x dans F
- Une variable libre de F est une variable de F dont au moins une occurrence est libre
- Une variable liée de F est une variable non libre de F (toutes les occurrences sont liées)
- Une formule clause est une formule dont toutes les variables sont liées.

Des variables libres/liées

$P(\underline{x})$

$\forall x \, . \, P(\mathbf{x})$

$\exists y \, . \, Q(\underline{x})$

$\exists \, y \, . \, (Q(\mathbf{y}) \wedge P(\mathbf{y}))$

$(\forall \, x \, . \, P(\mathbf{x})) \wedge Q(\underline{x})$

$\forall \, x \, . \, (P(\mathbf{x}) \wedge Q(x))$

$\forall \, x \, . \, P(\mathbf{x}) \wedge Q(\underline{y})$

$P(\underline{x}) \Rightarrow \exists \, x \, . \, Q(\mathbf{x})$

$\exists \, x \, . \, (P(\mathbf{x}) \Rightarrow Q(\mathbf{x}))$

$\forall \, x \, . \, \exists \, y \, . \, (P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{y}))$

$\forall \, x \, . \, (P(\mathbf{x}) \Rightarrow \exists \, y \, . \, (Q(\mathbf{y}) \wedge R(\mathbf{x})))$

Libres ?

Liées ?

Des variables libres/liées

$P(\underline{x})$	x est libre
$\forall x \,.\, P(\mathbf{x})$	x est liée
$\exists y \,.\, Q(\underline{x})$	x est libre
$\exists\, y \,.\, (Q(\mathbf{y}) \wedge P(\mathbf{y}))$	y est liée
$(\forall\, x \,.\, P(\mathbf{x})) \wedge Q(\underline{x})$	x est libre
$\forall\, x \,.\, (P(\mathbf{x}) \wedge Q(x))$	x est liée
$\forall\, x \,.\, P(\mathbf{x}) \wedge Q(\underline{y})$	x est liée, y est libre
$P(\underline{x}) \Rightarrow \exists\, x \,.\, Q(\mathbf{x})$	x est libre
$\exists\, x \,.\, (P(\mathbf{x}) \Rightarrow Q(\mathbf{x}))$	x est liée
$\forall\, x \,.\, \exists\, y \,.\, (P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{y}))$	x et y sont liées
$\forall\, x \,.\, (P(\mathbf{x}) \Rightarrow \exists\, y \,.\, (Q(\mathbf{y}) \wedge R(\mathbf{x})))$	x et y sont liées

Des variables libres/liées

$$\forall x \cdot (A(x,y) \Rightarrow ((\forall x \cdot B(x)) \vee (\exists y \cdot C(x,y))))$$

Dans l'exemple précédant :

- x est liée,
- y est libre et
- la formule n'est pas close.

substitutions

- Soit F une formule, x une variable et t un terme. **F[t/x] désigne F dans laquelle chaque occurrence libre de x a été remplacée par t**.

- Dans l'exemple précédant :

$(\forall x \cdot (A(x,y) \Rightarrow ((\forall x \cdot B(x)) \vee (\exists y \cdot C(x,y)))$

  - $F[v/x] = \forall x \cdot (A(x,y) \Rightarrow ((\forall x \cdot B(x)) \vee (\exists y \cdot C(x,y))) = F$
  - $F[v/y] = \forall x \cdot (A(x,v) \Rightarrow ((\forall x \cdot B(x)) \vee (\exists y \cdot C(x,y)))$

Un calcul des séquents

$$\frac{\Gamma, P[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \bullet P(x) \vdash \Delta} \forall_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash P[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x \bullet P(x), \Delta} \exists_d$$

$$\frac{\Gamma, P[y/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \bullet P(x) \vdash \Delta} \exists g\ (*)$$

$$\frac{\Gamma \vdash P[y/x], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x \bullet P(x), \Delta} \forall_d (*)$$

(*) : y non libre dans Δ, ni dans Γ

Un calcul de séquent

- Réutilisation du calcul de séquent des propositions

- Le $\forall_d$ résonne sur l'existence d'un individu quelconque, une variable dont on ne sait rien, une variable qui n'apparaît nulle part dans le séquent

- Le $\exists_g$ Nous dit que si l'on a $\exists x. P(x)$ en hypothèse alors on sait que P vaut pour un individu quelconque ($\exists x$) qui est ici une variable non libre du séquent

Un calcul de sequent

$$\dfrac{}{P(y), \forall\, x\, Q(x) \vdash P(y)}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{}{\forall\, x\, P(x),\ Q(y) \vdash Q(y)}\ \text{axiome}$$

$$\dfrac{P(y), \forall\, x\, Q(x) \vdash P(y)}{\forall\, x\, P(x), \forall\, x\, Q(x) \vdash P(y)}\ \forall_g\ (y/x) \qquad \dfrac{\forall\, x\, P(x),\ Q(y) \vdash Q(y)}{\forall\, x\, P(x), \forall\, x\, Q(x) \vdash Q(y)}\ \forall_g$$

$$\dfrac{\forall\, x\, P(x), \forall\, x\, Q(x) \vdash P(y) \qquad \forall\, x\, P(x), \forall\, x\, Q(x) \vdash Q(y)}{\forall\, x\, .\, P(x),\ \forall\, x\, .\, Q(x) \vdash P(y) \wedge Q(y)}\ \wedge_d$$

$$\dfrac{\forall\, x\, .\, P(x),\ \forall\, x\, .\, Q(x) \vdash P(y) \wedge Q(y)}{\forall\, x\, .\, P(x) \wedge \forall\, x\, .\, Q(x) \vdash P(y) \wedge Q(y)}\ \wedge_g$$

$$\dfrac{\forall\, x\, .\, P(x) \wedge \forall\, x\, .\, Q(x) \vdash P(y) \wedge Q(y)}{\forall\, x\, .\, P(x) \wedge \forall\, x\, .\, Q(x) \vdash \forall\, x\, .\, (P(x) \wedge Q(x))}\ \forall_d$$

Résultats fondamentaux

- Correction : Si une formule est prouvable alors elle est vraie
- Complétude : Si une formule est vraie alors elle est prouvable
- Indécidabilité : il n’existe pas d’algorithme qui se termine et qui permet de statuer de la validité d’une formule

Exercice

Quelles sont parmi les propositions suivantes celles qui deviennent indiscernables les unes des autres une fois traduites en symboles ?

1. Tout homme est mortel
2. Toute chose qui est un homme est mortelle
3. Toute chose est ou bien non pas un homme ou bien alors mortelle
4. Il n’est pas vrai que quelques hommes ne sont pas mortels
5. Aucun homme n’est non mortel
6. Il n’y a pas d’hommes qui ne sont pas mortels

Exercice

M(x) x est mortel
C(x) x est une chose
H(x) x est un homme

Tout homme est mortel
$\forall$ x . H(x) $\Rightarrow$ M(x)

Toute chose qui est un homme est mortelle
$\forall$ x . C(x) $\wedge$ H(x) $\Rightarrow$ M(x)

Toute chose est ou bien non pas un homme ou bien alors mortelle
$\forall$ x . C(x) $\Rightarrow$ ($\neg$ H(x) $\vee$ M(x)) $\wedge$ $\neg$ ($\neg$ H(x) $\wedge$ M(x))

Il n'est pas vrai que quelques hommes ne sont pas mortels
$\neg$($\forall$ x . H(x) $\Rightarrow$ M(x))

Aucun homme n'est non mortel
$\forall$ x . H(x) $\Rightarrow$ M(x)

Il n'y a pas d'hommes qui ne sont pas mortels
$\neg$ ($\exists$ x . (H(x) $\Rightarrow$ $\neg$ M(x)))

Conclusion

- Non décidable
- Fort pouvoir d’expression
- Impossibilité de quantifier sur des prédicats