

M1.21.2 Outils mathématiques
pour l'informatique (3/4)
Théorie des ensembles

IUT1 dpt SRC L'Isle d'Abeau
Jean-François Berdjugin
Jean-François Remm

Définition

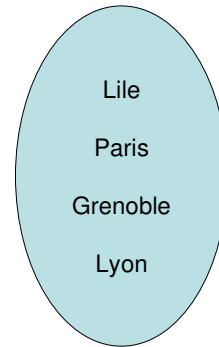
La théorie des ensembles définit la notions d'ensemble.

Plusieurs approches :

- Naïve => paradoxes
- Axiomatique (Zermelo)

Naïve

- L'ensemble peut être vu comme un sac virtuel contenant des **éléments**.
- Villes={Lile, Paris, Grenoble, Lyon}
- On dit que l'élément **appartient** à l'ensemble
 - Lile \in Ville
 - ...
 - Lyon \in Ville
- On dit que l'élément n'appartient pas.
 - Toulouse \notin Ville



Naïve

- Égalité
 $(A=B) \Leftrightarrow [\forall x \bullet (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$
- Singleton
{a}
 $\forall a \bullet \exists S \bullet \forall x \bullet (x \in S) \Leftrightarrow (x = a)$
- {a,b}
 $\forall a \bullet \forall b \bullet \exists P \bullet \forall x \bullet [(x \in P) \Leftrightarrow (x = a) \vee (x = b)]$

Naïve

- $\{a,a\} = \{a\}$?
- $\{a,b\} = \{c,d\}$
 $\forall a \bullet \forall b \bullet \forall c \bullet \forall d \bullet \{a,b\} = \{c,d\} \Leftrightarrow [(a=c \wedge b=d) \vee (a=d \wedge b=c)]$
- $\{a,b\} = \{b,a\}$?

Naïve

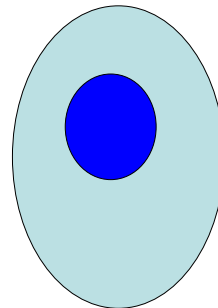
- $\{a,a\} = \{a\}$?
En utilisant
 $\forall a \bullet \forall b \bullet \exists P \bullet \forall x \bullet [(x \in P) \Leftrightarrow (x = a) \vee (x = b)]$
- $\{a,b\} = \{c,d\}$
 $\forall a \bullet \forall b \bullet \forall c \bullet \forall d \bullet \{a,b\} = \{c,d\} \Leftrightarrow [(a=c \wedge b=d) \vee (a=d \wedge b=c)]$
- $\{a,b\} = \{b,a\}$?
En utilisant le lemme précédent

Naïve

- Définition en extension
 $\{1,2,3,4,5\}$
- Définition en compréhension
 $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 6\}$
 $\{x : \mathbb{N} \mid 0 < x < 6\}$
 $\{x : \mathbb{N} \mid 1 < x < 7 \bullet x-1\}$

Naïve

- Ensemble vide $\emptyset = \{\}$
 $\exists E \bullet \forall x \bullet x \notin E$
- Ensemble universel
 \Rightarrow Problème
- Inclusion $A \subseteq B$
 $\forall x \bullet (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$
 $\{x \in A \mid P(x)\} \subseteq A$



Naïve

- $\forall A \bullet \emptyset \subseteq A ?$

- $\forall A \bullet A \subseteq A ?$

Naïve

- $\forall A \bullet \emptyset \subseteq A ?$

Par l'absurde on suppose que $\{\}$ n'est pas un sous-ensemble de A donc $\{\}$ contient un élément qui n'est pas élément de A or $\{\}$ est vide.

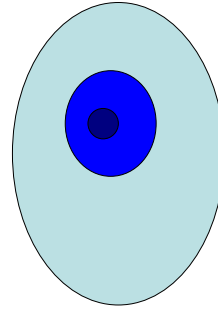
- $\forall A \bullet A \subseteq A ?$

Définition de l'inclusion

Naïve

- $\forall A \bullet \forall B \bullet (A=B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

- $\forall A \bullet \forall B \bullet \forall C \bullet (A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$



Naïve

- Ensemble des parties $\wp E$
 $\forall E \bullet \exists P \bullet \forall x \bullet x \in P \Leftrightarrow x \subseteq E$

$$\wp \{1,2\} = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

Naïve

Opération

Union $S = A \cup B$

$$\forall A \bullet \forall B \bullet \exists S (x \in S) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

Intersection $S = A \cap B$

$$\forall A \bullet \forall B \bullet \exists U (x \in U) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

Différence $S = A / B$

$$\forall A \bullet \forall B \bullet \exists U (x \in U) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$

Paradoxe

Le mathématicien Bertrand Russell proposa en 1901 de considérer l'ensemble des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes.

Soit M cet ensemble. Formellement, A est un élément de M ssi A n'est pas un élément de lui-même.

Faisons l'hypothèse que M se contient lui-même, autrement dit que M est un élément de M . Cela est contradictoire avec la définition de M . On en déduit que M ne se contient pas lui-même. Mais dans ce cas, M est un ensemble qui n'est pas élément de lui-même et devrait à ce titre faire partie de M . Ainsi naît le paradoxe.

Paradoxe

$$M = \{A \mid A \notin A\}$$

Soit $M \in M$

par définition $M \Rightarrow M \notin M$

Soit $M \notin M$

par définition $M \Rightarrow M \in M$

Contraction \Rightarrow paradoxe

Paradoxe

Quelques années plus tard, en 1919, Russell publiera une version populaire de son antinomie, connue sous le nom de paradoxe du barbier : définissons le barbier du village comme le villageois qui rase les gens qui ne se rasent pas eux-mêmes. Qui rase le barbier? S'il se rase lui-même, c'est donc le barbier qui le rase, mais par définition, le barbier ne rase que les villageois qui ne se rasent pas eux-mêmes! Impossible donc... C'est donc un autre villageois qui rase le barbier. Mais, toujours par définition du barbier, c'est lui qui doit le raser! Contradiction!

Théorie axiomatique

axiome d'extensionnalité:

- Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments.
- (ext) : $\forall S \bullet \forall T \bullet (\forall x \bullet (x \in S \Leftrightarrow x \in T) \Rightarrow S = T)$

Théorie axiomatique

Axiome de la paire :

- Étant donné deux ensembles S et T, il existe un ensemble dont les éléments sont exactement S et T et noté {S, T}.
- (paire) : $\forall A \bullet \forall S \bullet \forall T \bullet (A \in \{S, T\} \Leftrightarrow A = S \vee A = T)$

Théorie axiomatique

axiome de la réunion :

- Étant donné un ensemble S , il existe un ensemble dont les éléments sont les éléments des éléments de S donc qui est la réunion des ensembles qui appartiennent à S .
- (réunion) : $\forall a \bullet \forall S \bullet (a \in \cup_{x \in S} x \Leftrightarrow \exists T \bullet (t \in S \wedge a \in T))$

Théorie axiomatique

axiome des parties :

- Étant donné un ensemble S , il existe un ensemble noté $\wp(S)$ dont les éléments sont les sous ensembles de S .
- (parties) : $\forall a \forall S (a \in \wp(S) \Leftrightarrow \forall x (x \in a \Rightarrow x \in S))$

Théorie axiomatique

schéma d'axiomes de compréhension :

- Il s'agit d'une infinité d'axiomes. Pour toute formule F , et tout ensemble S , il existe un ensemble dont les éléments sont les éléments de S qui vérifient F .
- (comp) : $\forall a \forall S (a \in \{x \mid x \in S \wedge F(x)\} \Leftrightarrow a \in S \wedge F(a))$

Théorie axiomatique

(vide) : $\exists a (\forall x (x \notin a))$

(infini) : $\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$

Théorie axiomatique

Inclusion

$$A \subseteq B = A \in \wp(B)$$

Union

$$A \cup B = \bigcup_{x \in \{A, B\}} x$$

Intersection

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Différence

$$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Théorie axiomatique

Dans la pratique :

$$\text{N'appartient pas } a \notin B \Leftrightarrow \neg(a \in B)$$

$$\text{Inclusion} \quad A \subseteq B = A \in \wp(B)$$

$$\text{Union} \quad A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$\text{Intersection} \quad A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$\text{Différence} \quad A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Théorie axiomatique

Couple :

Un couple (a; b) est une paire ordonnée, c'est à dire un ensemble dont le premier élément est a et le second b. On peut exprimer cette propriété par :

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Théorie axiomatique

On peut ensuite définir le produit cartésien de deux ensembles A et B comme l'ensemble des couples dont le premier élément est dans A et le second dans B:

$$A \times B = \{(x, y) \mid (x, y) \in \wp(\wp(A \cup B)) \wedge x \in A \wedge y \in B\}$$

$$a = \{1, 2\} \quad b = \{x\}$$

$$a \cup b = \{1, 2, x\}$$

$$\wp(a \cup b) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{x\}, \{1, 2\}, \{1, x\}, \{2, x\}, \{1, 2, x\}\}$$

$$\wp \wp(a \cup b) = \{\emptyset,$$

$$\{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{x\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{1, x\}\}, \{\{2, x\}\}, \{\{1, 2, x\}\},$$

$$\{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, \{x\}\}, \{\emptyset, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1, x\}\}, \{\emptyset, \{2, x\}\}, \{\emptyset, \{1, 2, x\}\},$$

$$\{\{1\}, \{1\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{x\}\}, \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{1, x\}\}, \{\{1\}, \{2, x\}\}, \{\{1\}, \{1, 2, x\}\},$$

...

}

Théorie axiomatique

Montrer $\forall a \forall b (a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

Simplement : $A = \{a\}$, $B = \{b\}$

$A \cup B = \{a,b\}$

$\wp(a \cup b) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

$\wp \wp(a \cup b) = \{\{\},$

$\{\{\},\{a\}\}, \{\{\},\{b\}\}, \{\{\},\{a,b\}\}$

$\{\{a\},\{b\}\}, \{\{a\},\{a,b\}\}, \{\{b\}, \{a,b\}\}, \{\{a,b\}\}$

$(x, y) \in \wp(\wp(A \cup B)) \wedge x \in A \wedge y \in B$

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

Exercice

Démontrer que :

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Sachant que :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\wp(A \cap B) = (\wp A) \cap (\wp B)$$

Exercice

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

\Leftrightarrow

$$(x,y) \in A \times (B \cap C)$$

\Leftrightarrow

$$x \in A \wedge y \in B \cap C \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup (B \cap C)))$$

\Leftrightarrow

$$x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup (B \cap C)))$$

\Leftrightarrow

$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup (B \cap C)))$$

\Leftrightarrow

$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x,y) \in \wp(\wp((A \cup B) \cap (A \cup C)))$$

\Leftrightarrow

$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup B) \cap \wp(A \cup C))$$

\Leftrightarrow

$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup B)) \cap \wp(\wp(A \cup C))$$

\Leftrightarrow

$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup B)) \wedge (x,y) \in \wp(\wp(A \cup C))$$

\Leftrightarrow

$$(x,y) \in (A \times B) \wedge (x,y) \in (A \times C)$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$