M1.21.2 Outils mathématiques pour l'informatique (4/4)

Relations et Fonctions

IUT1 dpt SRC L'Isle d'Abeau

Jean-François Berdjugin

Jean-François Remm

Pourquoi

La théorie des ensemble nous permet de définir et d'utiliser des ensemble.

Cependant, nous aimerions associer plus facilement, mettre en relation les éléments des ensembles entre eux.

Les relations et un de leur sous-cas les fonctions vont nous y aider.

Exemple

Un hôpital :

1. Un hôpital est composé d’un ensemble de chambres numérotées de 1 à n.
2. Dans chaque chambre on trouve au moins un lit.
3. Les chambres peuvent avoir un nombre de lits différent.
4. Une chambre peut être soit vide, soit pleine, soit partiellement occupée.
5. Les malades sont soit des enfants, soit des femmes adultes, soit des hommes adultes.
6. Une chambre ne comporte que des malades d’une même catégorie

Exemple

Intuitivement nous avons :

- trois ensembles:
  -
  -
  -
- Quatre relations
  -
  -
  -
  -

Exemple

Intuitivement nous avons :

- trois ensembles:
  - Chambre
  - Malade
  - Catégorie = {E,H,F}
- Quatre relations
  - Une entre Chambre et les entiers compris entre 1 et n (le numéro de chambre).
  - Une entre Chambre et les entiers (la capacité de la chambre)
  - Une entre Malade et Chambre (la chambre de)
  - Une entre Malade et Catégorie (la catégorie de)

Exemple

Autre relations mathématiques bien connues

- $=$,$<$, $\leq$, $\neq$
- les graphes (des sommets, des sommets mis en relation par des arcs)
- les courbes
- …

Relations binaires

L'ensemble des relations entre les ensembles X et Y est défini comme suit ;

$$X \leftrightarrow Y = \wp(X \times Y)$$

Si Malade={A,L} et Catégorie={E,H,F} Alors

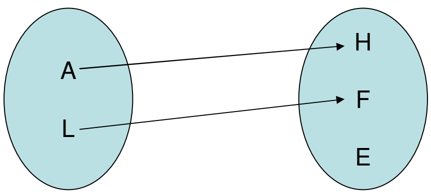
Malade x Catégorie = {(A,E), (A,H), (A,F), (L,E), (L,H), (L,F)}

Malade ↔ Catégorie = ℘(Malade x Catégorie) = {∅,
{(A,E)}, {(A,H)}, {(A,F)}, {(L,E)}, {(L,H)}, {(L,F)},
{(A,E), (A,H)}, {(A,E), (A,F)}, {(A,E), (L,E)}, {(A,E), (L,H)},{(A,E), (L,F)},
{(A,H),(A,F)}, {(A,H), (L,E)}, {(A,H), (L,H)},{(A,H), (L,F)},
{(A,F), (L,E)}, {(A,F), (L,H)},{(A,F), (L,F)},
{(L,E), (L,H)},{(L,E), (L,F)},
{(A,E), (A,H), (A,F)}, {(A,E), (A,H), (L,E)}, {(A,E), (A,H), (L,F)},
{(A,E), (A,F), (L,E)}, {(A,E), (A,F), (L,F)},
….
{(A,E), (A,H), (A,F), (L,E), (L,H), (L,F)}}

Relation binaire

Un élément de l'ensemble des relations (entre deux ensembles) est une **relation**

par exemple : R = {(A,H), (L,F)} ∈ X ↔ Y



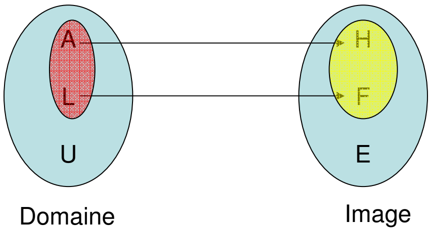
Domaine, Image

Nous pouvons définir le **domaine** d'une relation R entre X et Y comme étant :

- **dom** R = {x:X, y:Y | (x,y) ∈ R • x}

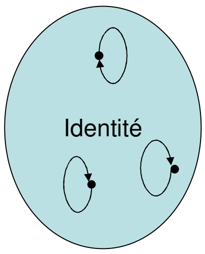
Nous pouvons définir l'**image** d'une relation R entre X et Y comme étant :

- **ran** R = {x:X, y:Y | (x,y) ∈ R • y}



Relation identité

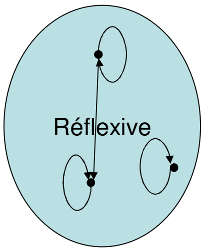
id X == {x: X • (x,x)}

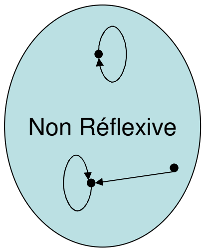


Relation réflexive

Une relation R de X vers X est dite réflexive ssi

- $\forall x : X \bullet (x, x) \in R$.

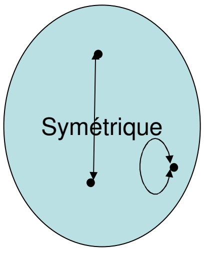


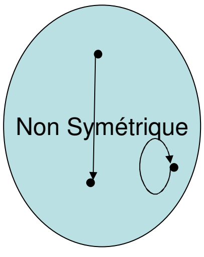


Relation Symétrique

Une relation R de X vers X est dite symétrique ssi

- $\forall x,y : X \bullet (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

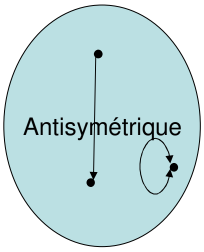


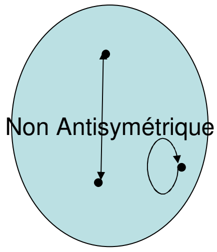


Relation Antisymétrique

Une relation R de X vers X est dite antisymétrique ssi

. $\forall x,y:X \bullet (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x=y$

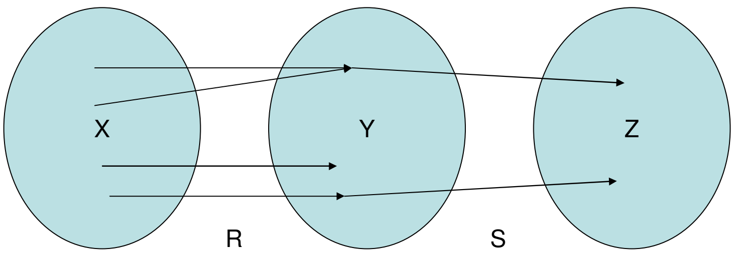




Composition de relations

Les relations peuvent être **composées**, la composée de deux relations peut être notée « ; » ou « ° ». Si $R \in X \leftrightarrow Y$ et $S \in Y \leftrightarrow Z$ alors $(x,y) \in R; S \Leftrightarrow \exists\, y : Y \bullet (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S$.

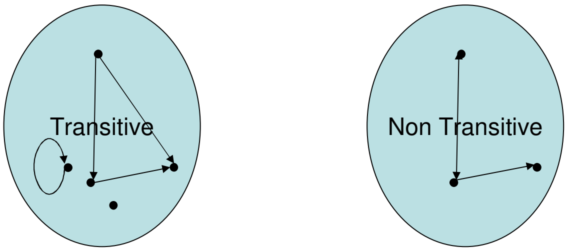
R;S = S ° R



Relation Transitive

- Une relation R de X vers X est dite transitive ssi

$\forall$ x,y,z : X $\bullet$ (x,y) $\in$ R $\wedge$ (y,z) $\in$ R $\Rightarrow$ (x,z) $\in$ R



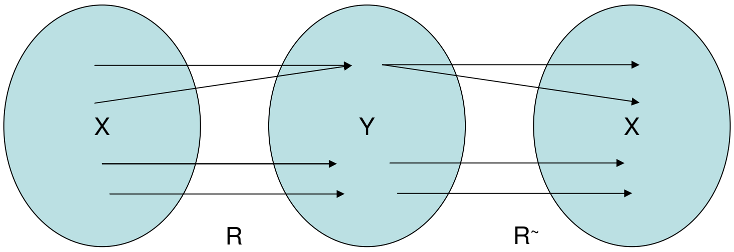
Relation d'équivalence

Une **relation d'équivalence** est définie comme étant une relation :
- Réflexive,
- Symétrique
- Transitive

Par exemple la relation = est une relation d'équivalence :
- Quelque soit x, x=x
- Quelque soit x et y si x=y alors y = x
- Quelque soit x, y, et z si x=y et y=z alors x=z

Fonction Inverse

Si R est une relation de X vers Y alors la relation inverse de Y vers X notée $R^{\sim}$ ou R^{-1} est définie comme $R;R^{\sim}=Id$



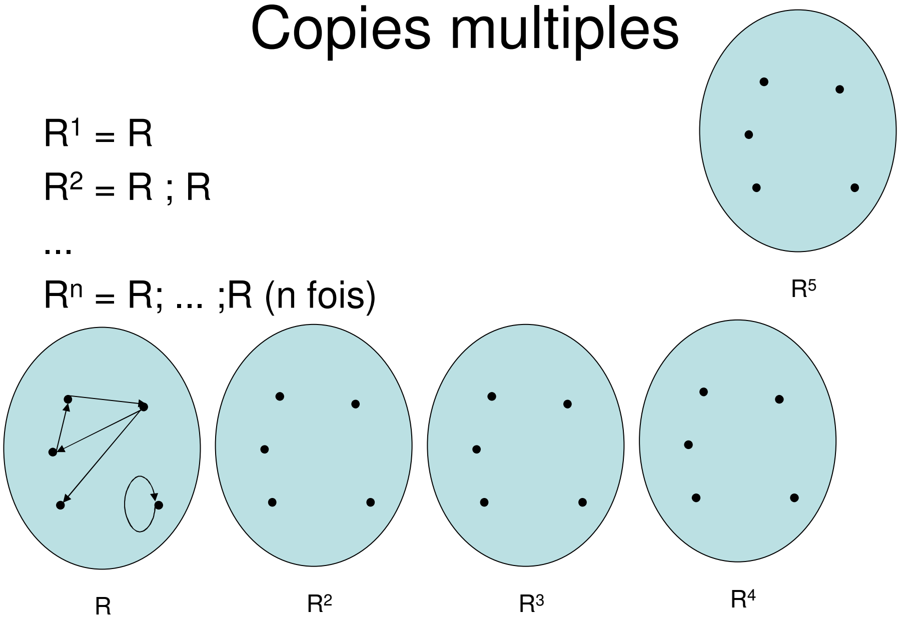
Copies multiples

$R^1 = R$

$R^2 = R ; R$

...

$R^n = R; ... ;R$ (n fois)



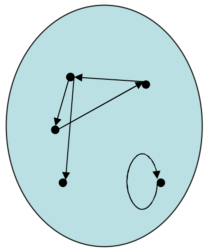
Copies multiples

$R^1 = R$

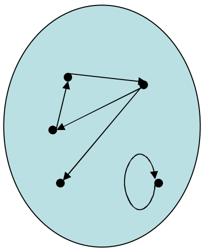
$R^2 = R ; R$

...

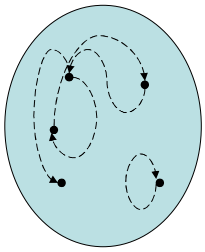
$R^n = R; \ldots ;R$ (n fois)



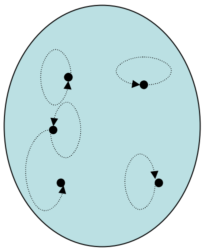
$R^5=R^8$



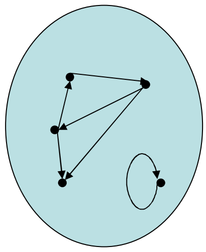
R



R^2



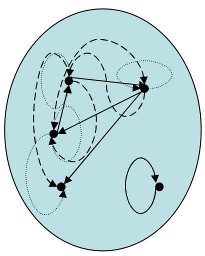
$R^3=R^6$



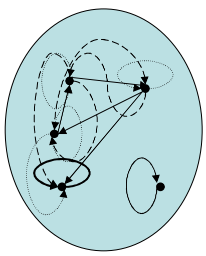
$R^4=R^7$

Fermeture Transitive

- $R^+ = \cup \{n: \aleph \mid n \geq 1 \bullet R^n\}$ la **fermeture transitive**
- $R^* = R^+ \cup \mathrm{Id}\ X$ la **fermeture transitive réflexive**.



R^+



R^*

Fonctions

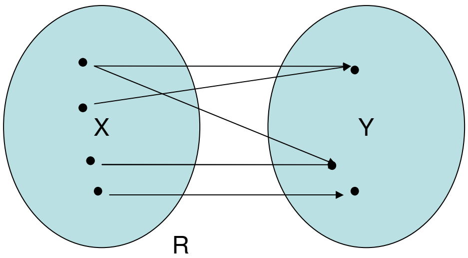
Les fonctions sont des relations particulières qui a un élément du domaine associe un élément image unique.

- les **fonctions partielles** sont définies comme suit :

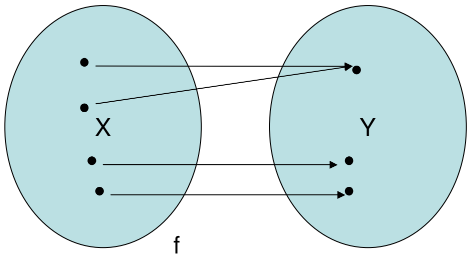
$X \text{ -|-> } Y = \{f : X \leftrightarrow Y \mid \forall\, x: X;\ y1,y2: Y \bullet (x,y1) \in f \wedge (x,y2) \in f \Rightarrow y1=y2\}$

- les f**onctions totales** sont définies comme suit :

$X \rightarrow Y = \{ f: X \text{ -|-> } Y \mid \text{dom } f = X\}$

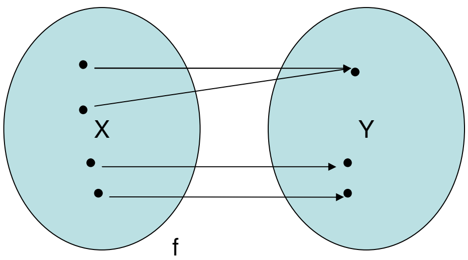


R
Pas fonction

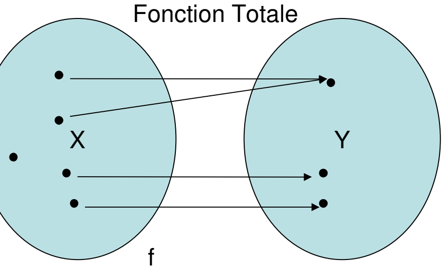


f
Fonction Totale

Fonctions



f
Fonction Totale



f
Fonction Partielle

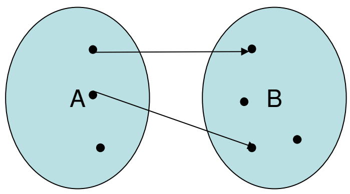
Fonction Injective

fonction partielle injective :

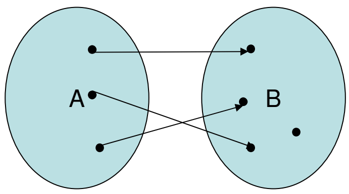
A >-|-> B = {f: A-|->B | ∀ x1, x2: dom f • f(x1) = f(x2) ⇒ x1=x2}

fonction totale injective :

A >--> B = (A → B) ∩ (A >–|–> B)



A >-|-> B



A >--> B

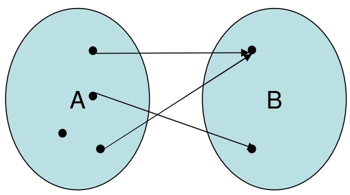
Fonction Surjective

fonction partielles surjectives :

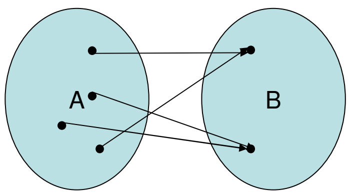
A-|->> B = {f: A -|-> B | ran f = B}

fonction totales surjectives :

A -->> B = (A → B) ∩ (A–|–>>B)



A -|->> B



A -->> B

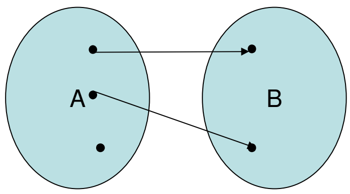
Fonction Bijective

onction partielles bijectives :

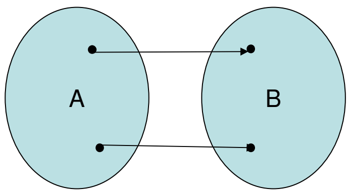
A >-|->> B = (A >–|–> B) ∩ (A–|–>>B)

fonction totale bijectives :

A >-->> B = (A → B) ∩ (A >-|->> B)



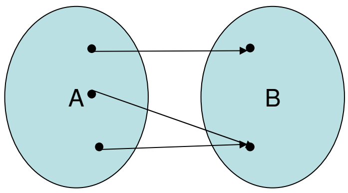
A >-|->> B



A >-->> B

Principe des tiroirs

Principe des tiroirs : Si f: A → B est une fonction totale où A et B sont des nombres finis et |A| > k |B| avec k entier strictement positif alors certaines valeurs de f se répètent au moins k+1 fois.



Principe des tiroirs

Combien de cartes faut-il tirer d'un paquet de 52 cartes pour être certain d'en tirer au moins deux de la même couleur ?

f : CartesTirées $\rightarrow$ Couleur

|Couleur| = 4 et |5| >1 |4|

=> Au moins 5 cartes

Hôpital

Un hôpital :

1. Un hôpital est composé d'un ensemble de chambres numérotées de 1 à n.
2. Dans chaque chambre on trouve au moins un lit.
3. Les chambres peuvent avoir un nombre de lits différent.
4. Une chambre peut être soit vide, soit pleine, soit partiellement occupée.
5. Les malades sont soit des enfants, soit des femmes adultes, soit des hommes adultes.
6. Une chambre ne comporte que des malades d'une même catégorie

Hôpital

Intuitivement nous avons :

- trois ensembles:
  - Chambre
  - Malade
  - Catégorie = {E,H,F}
- Quatre relations
  - Une entre Chambre et les entiers compris entre 1 et n (le numéro de chambre).
  - Une entre Chambre et les entiers (la capacité de la chambre)
  - Une entre Malade et Chambre (la chambre de)
  - Une entre Malade et Catégorie (la catégorie de)

Hôpital

Formellement :

- trois ensembles:
  - Chambre
  - Malade
  - Catégorie = {E,H,F}
- Quatre relations
  - numéro $\in$ Chambre $\leftrightarrow$ $\mathbf{1..n}$
  - capacité $\in$ Chambre $\leftrightarrow$ $\mathbf{N}$
  - chambrede $\in$ Malade $\leftrightarrow$ Chambre
  - catégoriede $\in$ Malade $\leftrightarrow$ Catégorie

L'Hôpital

Un hôpital est composé d'un ensemble de chambres numérotées de 1 à n.

– numéro $\in$ Chambre $\leftrightarrow$ **1..n** ne suffit pas pour traduire la contrainte

–

L'Hôpital

Un hôpital est composé d'un ensemble de chambres numérotées de 1 à n.

– numéro $\in$ Chambre $\leftrightarrow$ **1..n** ne suffit pas pour traduire la contrainte

– numéro $\in$ Chambre >-->> 1..n (bijection)

L’Hôpital

Dans chaque chambre on trouve au moins un lit.

– capacité $\in$ Chambre $\leftrightarrow \mathbb{N}$ ne suffit pas pour traduire la contrainte

–

L’Hôpital

Dans chaque chambre on trouve au moins un lit.

– capacité $\in$ Chambre $\leftrightarrow \mathbb{N}$ ne suffit pas pour traduire la contrainte

– capacité $\in$ Chambre $\rightarrow \mathbb{N}$ (Fonction)

L’Hôpital

Les chambres peuvent avoir un nombre de lits différent

L’Hôpital

Les chambres peuvent avoir un nombre de lits différent

- Déjà exprimé par :

  capacité $\in$ Chambre $\rightarrow \mathbf{N}$

L’Hôpital

Une chambre peut être soit vide, soit pleine, soit partiellement occupée.

L’Hôpital

Une chambre peut être soit vide, soit pleine, soit partiellement occupée.

$occupantde = chambrede^{\sim}$

$\forall\ c : Chambre \bullet 0 \leq |occupantde(c)| \leq capacité(c)$

L’Hôpital

Les malades sont soit des enfants, soit des femmes adultes, soit des hommes adultes

- catégoriede $\in$ Malade $\leftrightarrow$ Catégorie
-

L’Hôpital

Les malades sont soit des enfants, soit des femmes adultes, soit des hommes adultes

- catégoriede $\in$ Malade $\leftrightarrow$ Catégorie
- catégoriede $\in$ Malade $\rightarrow$ Catégorie

L’Hôpital

Une chambre ne comporte que des malades d’une même catégorie

L’Hôpital

Une chambre ne comporte que des malades d’une même catégorie

occupantde; catégoriede $\in$ Chambre -|-> catégorie

Hôpital

Oubli : contrainte implicite, les malades n’occupent qu’une seule chambre

Hôpital

Oubli : contrainte implicite, les malades n’occupent qu’une seule chambre

Chambrede $\in$ Malade $\rightarrow$ Chambre

Familles

Il y a dans un village 79 familles de deux enfants

1. Démontrer qu'il existe deux familles telles que les mois de naissance des deux enfants sont les mêmes pour chaque famille
2. Étant donné que chaque enfant a un prénom, démontrer qu'il y a au moins sept enfants dont les prénoms commencent par la même lettre

Familles

Il y a dans un village 79 familles de deux enfants

1. Démontrer qu'il existe deux familles telles que les mois de naissance des deux enfants sont les mêmes pour chaque famille

Familles

Il y a dans un village 79 familles de deux enfants

1. Démontrer qu'il existe deux familles telles que les mois de naissance des deux enfants sont les mêmes pour chaque famille

A l'ensemble des familles, B l'ensemble des différentes paires de noms.

f: $A \rightarrow B$
$|A| = 79$
$|B| = ?$
12 mois => 144 paires ordonnées possibles
12 paires avec deux fois le même mois
144 – 12 = 132 paires avec des mois différents
Pour nos comparaisons (a,b) équivaut à (b,a) soit 132/2 = 66 paires
Donc au total 66+12 = 78 paires de mois distinctes =>
$|B| = 78$
$|A| > 1\ |B|$
cqfd

Familles

Il y a dans un village 79 familles de deux enfants

2. Étant donné que chaque enfant a un prénom, démontrer qu'il y a au moins sept enfants dont les prénoms commencent par la même lettre

Familles

Il y a dans un village 79 familles de deux enfants

2. Étant donné que chaque enfant a un prénom, démontrer qu'il y a au moins sept enfants dont les prénoms commencent par la même lettre

A l'ensemble des enfants

B l'ensemble des lettres de l'alphabet

f: $A \rightarrow B$

$|A|=79x2=158$

$|B|=26$

$|A|>6|B|$

cqfd